OPCIÓN A

1. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Sean **A** y **B** matrices 2 x 2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones: $\begin{cases} A+3B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices: $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Determine el determinante: **$|5(CD)^{-1}|$**, donde **$(C\ D)^{-1}$** es la matriz inversa de **$(C.D)$**.

$a)$

$$\begin{cases} A+3B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \\ 6A-3B=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -3 & -3\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow 7A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 7\\ 0 & -7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 7\\ 0 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2A-6B=(-2)\cdot\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -6 & 8\end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow (-7)B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7\\ -7 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$B=\frac{1}{(-7)}\begin{pmatrix}7 & 7\\ -7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$b)$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |C\cdot D|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0\Rightarrow Existe\ (C\cdot D)^{-1}\Rightarrow$$

$$(C\cdot D)^{-1}=\frac{1}{|C\cdot D|}\cdot adj\ (C.D)^t \Rightarrow (C.D)^t=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (C.D)^t=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(C\cdot D)^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \left|(C\cdot D)^{-1}\right|=\begin{vmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\left|5(C\cdot D)^{-1}\right|=5^2\cdot\left|(C\cdot D)^{-1}\right|=25\cdot\left|(C\cdot D)^{-1}\right|=-\frac{25}{2}$$

2. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Determine el valor o valores de m, si existen, para que la recta

$r:\begin{cases} mx+y=2 \\ x+mz=3 \end{cases}$ sea paralela al plano: π: $2x-y-z+6=0$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto **P = (2 , 1 , 1)** a la recta r cuando **m = 2**.

a) Cuando la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$y=2-mx \Rightarrow mz=3-x \Rightarrow z=\frac{3}{m}-\frac{x}{z} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\left(1\,,-m\,,-\frac{1}{m}\right)\equiv\left(m\,,-m^2\,,-1\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\left(m\,,-m^2\,,-1\right) \\ \overrightarrow{v_\pi}=\left(2\,,-1\,,-1\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=0\Rightarrow\left(m\,,-m^2\,,-1\right)\cdot\left(2\,,-1\,,-1\right)=0\Rightarrow 2m+m^2+1=0\Rightarrow$$

$$m^2+2m+1=0\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot1\cdot1=0\Rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=-1$$

b) Calcularemos un plano α que contenga al punto **P** y sea perpendicular a la recta **r**, para ello contamos con el vector director de la recta que será perpendicular al vector **PG**, siendo G el punto genérico del plano, el producto escalar, de ambos vectores, es nulo y la ecuación del plano que queremos buscar.
Se hallara el punto de intersección Q del plano α con la recta r, el modulo del vector PQ es la distancia buscada

$$r:\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases}\Rightarrow y=2-2x\Rightarrow 2z=3-x\Rightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=\left(1\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)\equiv\left(2\,,-4\,,-1\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\left(2\,,-4\,,-1\right) \\ \overrightarrow{PG}=\left(x\,,y\,,z\right)-\left(2\,,1\,,1\right)=\left(x-2\,,y-1\,,z-1\right) \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$\left(2\,,-4\,,-1\right)\cdot\left(x-2\,,y-1\,,z-1\right)=0\Rightarrow 2x-4-4y+4-z+1=0\Rightarrow\alpha\equiv 2x-4y-z+1=0$$

$$r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=2-4\lambda \\ z=\frac{3}{2}-\lambda \end{cases}\Rightarrow 2\cdot2\lambda-4\cdot\left(2-4\lambda\right)-\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)+1=0\Rightarrow 4\lambda-8+16\lambda-\frac{3}{2}+\lambda+1=0\Rightarrow$$

$$21\lambda-\frac{17}{2}=0\Rightarrow 21\lambda=\frac{17}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{17}{42}\Rightarrow Q\begin{cases} x=2\cdot\left(\frac{17}{42}\right) \\ y=2-4\cdot\left(\frac{17}{42}\right) \\ z=\frac{3}{2}-\frac{17}{42} \end{cases}\Rightarrow Q\left(\frac{17}{21}\,,2-\frac{34}{21}\,,\frac{63-17}{42}\right)\Rightarrow$$

$$Q\left(\frac{17}{21}\,,\frac{8}{21}\,,\frac{23}{21}\right)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{17}{21}\,,\frac{8}{21}\,,\frac{23}{21}\right)-\left(2\,,1\,,1\right)=\left(-\frac{25}{21}\,,-\frac{13}{21}\,,\frac{2}{21}\right)\Rightarrow$$

$$d\left(P\,,r\right)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{25}{21}\right)^2+\left(-\frac{13}{21}\right)^2+\left(\frac{2}{21}\right)^2}=\frac{\sqrt{625+169+4}}{21}=\frac{\sqrt{798}}{21}u$$

3. *(2,5 puntos)* Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$

a) *(1,25 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) *(1,25 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

$a)$

$$2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow f(3)=\frac{3^2}{2\cdot 3-6}=\frac{9}{0} \Rightarrow \textit{Sin solución} \Rightarrow Dom\,(f)=\forall x \in \Re-\{3\}$$

Asíntota vertical en $x=3$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty \Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x-6}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2x-6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-6)\,x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2\,(x-3)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+3x}{2(x-3)}\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \textit{Existe asíntota oblicua, } y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, \textit{ cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(2x-6)\,x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2\,(x-3)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+3x}{2(x-3)}\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=n=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

Existe asíntota oblicua, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$*, cuando* $x\to-\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción A

$b)$

$$f'(x)=\frac{2x(2x-6)-2x^2}{(2x-6)^2}=\frac{4x^2-12x-2x^2}{(2x-6)^2}=\frac{2x^2-12x}{2^2(x-3)^2}=\frac{2(x-6)x}{2^2(x-3)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}\Rightarrow$$

$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ x-6>0\Rightarrow x>6\\ (x-3)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$-\infty$ 0 6 ∞

$\frac{1}{2}>0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 6	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$(x - 3)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<0)\cup(x>6)$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/0<x<3$

Máximo relativo en $x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0^2}{2\cdot 0-6}=\frac{0}{-6}=0$ **De crecimiento pasa a decrecimiento**

Mínimo relativo en $x=6\Rightarrow f(-2)=\frac{6^2}{2\cdot 6-6}=\frac{36}{6}=6$ **De decrecimiento pasa a crecimiento**

4. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,25 puntos)* La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$. Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0)=1$.

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}$

$a)$

$$(x-1)^3(x-3)=(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)=x^4-3x^3+3x^2-x-3x^3+9x^2-9x+3=$$

$$(x-1)^3(x-3)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3\Rightarrow$$

$$f(x)=\int(x^4-6x^3+12x^2-10x+3)\,dx=\frac{x^5}{5}-6\cdot\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}-10\cdot\frac{x^2}{2}+3x+K$$

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+K\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow\frac{0^5}{5}-\frac{3\cdot 0^4}{2}+4\cdot 0^3-5\cdot 0^2+3\cdot 0+K=1\Rightarrow K=1$$

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+1$$

$b)$

$$Como \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+2}{x^3+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1} = 1^\infty = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1+2x+2-1}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3+1}+\frac{2x+1}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+1}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{3x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right]^{\cdot\left(3x^2+x+1\right)\frac{2x+1}{x^3+1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)\left(3x^2+x+1\right)}{x^3+1}}$$

$$Conociendo\ que \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3+2x^2+2x+3x^2+x+1}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\frac{x^3}{x^3}+5\frac{x^2}{x^3}+3\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{6+\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{6+0+0+0}{1+0} = 6 \Rightarrow$$

$$L == \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1} = e^6$$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} ax - 3y + 6z = 3 \\ ax + 3y + az = 6 \\ -ax - 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 6 \\ a & 3 & a \\ -a & -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -3 & 6 \\ 0 & 6 & a-6 \\ 0 & -9 & 15 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 6 & a-6 \\ -9 & 15 \end{vmatrix} = a \cdot (90 + 9a - 54) = a \cdot (36 + 9a) = 9a \cdot (4 + a)$$

$$|A| = 9a\,(a+4) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 9a\,(a+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-4\ ,\ 0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 15 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 24 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$

2. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos: $\begin{cases} \pi : x-y-z=0 \\ \pi' \begin{cases} x=3+2\lambda-\mu \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=\mu \end{cases} \end{cases}$

b) *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto **P = (1, 0, 1)**. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

Los planos o son paralelos, y entonces serian iguales o proporcionales sus vectores directores, o se cortan según una recta

El vector director del plano π' se halla realizando el producto escalar de los vectores que lo generan.

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\pi'_1}=(2\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{\pi'_2}=(-1\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{k}+\vec{k}-2\vec{j}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi'}}=(1\,,-2\,,3) \\ \overrightarrow{v_{\pi}}=(1\,,-1\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-1}\Rightarrow Su\ \text{int}er\text{sec}cion\ es\ una\ recta$$

b) La recta **r** queda definida por el punto P y el vector del plano π ya que es perpendicular a él. Hallaremos, en principio su ecuación continua para hallar la ecuación pedida a continuación

$$\overrightarrow{v_{\pi}}=(1\,,-1\,,-1)\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}\Rightarrow -x+1=y \\ \frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow y=z-1 \end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

3. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,25 puntos)* Considere la función: $f(x)=\begin{cases} x^2 & si & x<2 \\ 2x+a & si & 2\le x\le 4 \\ -x^2+3x+b & si & x>4 \end{cases}$

Determine los valores de ***a*** y **b** para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que ***a* = 0**. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de ***f*(*x*)** en ***x* = 2**.

$a)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4 \\ 2x+a \quad si \quad 2\le x\le 4 \\ -x^2+3x+b \quad si \quad x>4 \end{cases}\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\cdot 2+a=4+a \end{cases}\Rightarrow 4+a=4\Rightarrow a=0 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2\cdot 2+0=4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-2^2+3\cdot 2+b=-4+6+b \end{cases}\Rightarrow 2+b=4\Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

Continuación del Problema 3 de la opción B

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<2 \\ 2 & si \quad 2<x<4 \\ -2x^2+3 & si \quad x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=2\cdot 2=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x)=4\neq \lim_{x\to 2^+} f'(x)=2$$

$No\ es\ derivable\ en\ x=2$

4. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral: $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx$

$a)$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2=-x^2+2 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ funciones\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ -x^2+2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}>1 \\ x=-\sqrt{2}<-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x) \Rightarrow Simétrica \\ g(-x)=-(-x)^2+2=-x^2+2=g(x) \Rightarrow Simétrica \end{cases} \Rightarrow -1<0<1 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0^2=0 \\ g(x)=-0^2+2=2 \end{cases} \Rightarrow g(x)>f(x)$$

$$A=2\int_0^1\left(-x^2+2\right)dx-2\int_0^1 x^2\,dx=2\int_0^1\left(-2x^2+2\right)dx=4\int_0^1\left(-x^2+1\right)dx=-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+4\cdot[x]_0^1$$

$$A=-\frac{4}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+4\cdot(1-0)=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,u^2$$

$b)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & \underline{x^2-2x+1} \\ \underline{-x^3+2x^2-x} & x+2 \\ \quad 2x^2-x & \\ \underline{\quad -2x^2+4x-2} & \\ \qquad 3x-2 & \end{array}$$

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1=0 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow (x-1)^2=0$$

$$\frac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{3x-2}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \Rightarrow A(x-1)+B=3x-2$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow A(1-1)+B=3\cdot 1-2 \Rightarrow B=1 \\ Derivando \Rightarrow A=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

b)Continuación

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int_2^3 \left(x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \int_2^3 x\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_2^3 \frac{3}{x-1}\,dx + \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$x-1=t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \left[x^2\right]_2^3 + 2\cdot\left[x\right]_2^3 + 3\int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_1^2 t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\left(3^2-2^2\right) + 2\cdot(3-2) + 3\left[\ln t\right]_1^2 + \frac{1}{-2+1}\left[t^{-1}\right]_1^2$$

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{5}{2}+2+3\cdot(\ln 2-\ln 1) - \left[\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{9}{2}+3\,(\ln 2 - 0) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \frac{9}{2}+3\ln 2 - \frac{1}{2}+1 = 5+3\ln 2$$

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = 5+\ln 2^3 = 5+\ln 8$$